Σχεδίαση κ' Ανάλυση Αλγορίθμων (Τσιάκαλος)

2η διάλεξη
06/03/2019

Μας ενδιαφέρει ένας αλγόριθμος να ικανοποιεί τις εξής προϋποθέσεις
1) πρέπει να εργάζεται σωστά για κάθε σύνολο δεδομένων εισόδου δηλ. για κάθε στιγμιότυπο του πεδίου ορισμού του προβλήματος που λύνει
2) πρέπει να είναι αποδοτικός

Μας ενδιαφέρει οι αλγόριθμοι να είναι αποδοτικοί. Άρα, θέλουμε να ελαχιστοποιούν το χρόνο και το χώρο που χρησιμοποιούν.

Μονάδα Έκφρασης της Αποδοτικότητας

Η αρχή της σταθερότητας

Δύο διαφορετικές υλοποιήσεις του ίδιου αλγορίθμου δεν διαφέρουν στο χρόνο εκτέλεσης τους περισσότερο από κάποιο σταθερό πολ/σιο δηλ. αν E_1 ο χρόνος εκτέλεσης της μιας υλοποίησης και E_2 της άλλης, τότε ισχύει $E_1 = cE_2$ για κάποια σταθερά c.

Θα λέμε ότι ένας αλγόριθμος απαιτεί χρόνο $t(n)$ εάν υπάρχει σταθερά c και εφαρμογή αλγορίθμου τέτοια ώστε, για κάθε στιγμιότυπο μεγέθους n ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι μικρότερος ή ίσος του $(t(n))$

Είδη Αλγορίθμων

f(n)	Όνομα
n	γραμμικός
n^k	Πολυωνυμικός
c^n	εκθετικός
$\log^k n$	λογαριθμικός

Εργαλεία Εκτίμησης Πολυπλοκότητας

Ορισμός: Θεωρούμε συνάρτηση $T(n)$. Ορίζουμε

1. $T(n) \in O(f(n))$, αν υπάρχουν σταθερές c και n_0 ώστε $T(n) \leq c f(n)$, για κάθε $n \geq n_0$.
   Αν $T(n) \in O(f(n))$, τότε λέμε πως η συνάρτηση T είναι τάξεως $f(n)$.
2. $T(n) \in \Omega(g(n))$ αν υπάρχουν σταθερές c και n_0 ώστε $T(n) \geq c \cdot g(n)$, για κάθε $n \geq n_0$.
   Αν $T(n) \in \Omega(g(n))$ τότε λέμε πως η T είναι τάξεως ωμέγα του $g(n)$.
3. $T(n) \in \Theta(h(n))$, αν $T(n) \in O(h(n))$ και $T(n) \in \Omega(h(n))$.
   Αν $T(n) \in \Theta(h(n))$ τότε λέμε πως η T είναι τάξεως θήτα του $h(n)$.

Θεώρημα (χρήσιμο στις ασκήσεις στο επόμενο μάθημα)

Αν $T_1 \in O(f)$ και $T_2 \in O(g)$ τότε

Εαν $T_1 = n$ και $T_2 = n^2$ τότε $T_1 + T_2 = n + n^2 \in max$ οπου $max = n^2$

1) Ο χρόνος $T_1 + T_2 \in max(O(f), O(g))$

2) " " $T_1 \cdot T_2 \in O(f \cdot g)$

3) Αν $T(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού k τότε $T(x) \in \Theta(x^k)$

4) $\log^k n \in O(n)$ για κάθε k (σταθερά)

Απόδειξη (δεν θα την ζητήσει στις εξετάσεις)

2) Αφού $T_1 \in O(f)$, $\exists\, n_1, c_1 : T_1(n) \leq c_1 f(n)$

Αφού $T_2 \in O(g)$, $\exists\, n_2, c_2 : T_2(n) \leq c_2\, g(n)$

Θέτουμε $c = c_1 \cdot c_2$ και $m = max(n_1, n_2)$.

Τότε

$$T_1(n) \cdot T_2(n) \leq c_1 \cdot f(n) \cdot c_2 \cdot g(n) = c_1 \cdot c_2 \cdot f(n) \cdot g(n)$$
$$= c \cdot f(n) \cdot g(n), \quad \forall n \geq m.$$

Άρα, $T_1 \cdot T_2 \in O(f(n) \cdot g(n))$.

(έτσι, δεν θα πέσει. Με νούμερα όμως είναι πιθανόν)

Παραδείγματα

$15n + 32 \in O(n)$

$1324 \in O(1)$

$5n^2 \in O(n^2)$

$2n^2 + 4n + 2 \in O(n^2)$

γραμμικός αλγόριθμος. Η τάξη του είναι γραμμική.

Βρίσκουμε την τάξη ορίζοντας διά το άνω φράγμα

(το Ω (ωμέγα) είναι το κάτω φράγμα.